

Compagnie Générale de Géophysique (CGG)  
1, rue Léon Migaux  
91301 Massy

Université Pierre et Marie Curie  
Département d'Acoustique Physique  
Place Jussieu  
75005 Paris

Magistère Interuniversitaire de Physique  
24, rue Lhomond  
75231, Paris Cedex 05

Ecole Normale Supérieure de Lyon  
Services de Saint – Cloud  
Avenue de la Grille d'Honneur  
Parc de Saint-Cloud  
92211 Saint-Cloud

# **Anisotropy and attenuation issues Effects on sound waves Application to hydrocarbon prospection,**

**by François EUDIER**

L'Anisotropie et les Phénomènes d'Atténuation  
Effets sur les ondes sonores  
Application à la Prospection Pétrolière

Report of a stage study of Physical Acoustics,  
within the cursus of a Diplôme d'Etudes Approfondies (DEA) ,  
Mars-June 1988

Report of DEA stage study of Physical Acoustics in C.G.G.

## Contents :

1 – **in FRENCH** : **Original report of DEA stage study of Physical Acoustics in C.G.G.**

Rapport de stage de DEA à la C.G.G. by François EUDIER, pages 1-26, avec Addendum A1 by Charles NAVILLE, 4 pages.

2 – **in ENGLISH** : Translation of Part IV, « *Ellipticity and simple product* », Conclusions and References ; 3 pages

Compagnie Générale de Géophysique  
1, rue Léon Migaux  
91301 Massy

Université Pierre et Marie Curie  
D.E.A. d'Acoustique Physique  
Place Jussieu  
75005 Paris

Magistère Interuniversitaire de Physique  
24, rue Lhomond  
75231 Paris Cedex 05

Ecole Normale Supérieure de Lyon  
Services de Saint-Cloud  
Avenue de la Grille d'Honneur  
Parc de Saint-Cloud  
92211 Saint-Cloud

L'Anisotropie et les Phénomènes d'Atténuation  
Effets sur les Ondes Sonores  
Application à la Prospection Pétrolière

Rapport de stage de D.E.A.

François Eudier

Je tiens à remercier Monsieur Charles Naville qui m'a guidé et conseillé tout au long de ce stage; ainsi que Messieurs Cliet et Dubesset de l'Institut Français du Pétrole pour leur précieuse collaboration tant en discussions qu'en aides bibliographiques. Je remercie également Monsieur Spitz pour son aide mathématique ainsi que Monsieur le Professeur André Zarembowitch qui m'a donné la possibilité d'effectuer ce stage.

J'ai effectué ce stage de Février à Juin 1988, à la CGG, en compagnie de Monsieur Charles Naville qui fut un remarquable directeur de stage.

Ce rapport a été achevé le 3 Juillet 1988, grâce à un ordinateur Apple II E, une imprimante Imagewriter II, et le logiciel Appleworks Version 1.3

**Première partie : La Prospection Pétrolière**

1. Des sons chasseurs de pétrole .....	page 4
2. La sismique de puits .....	page 4
3. La détection à 3 composantes .....	page 7

**Seconde partie : Les Milieux Isotropes Absorbants**

1. Milieu unidimensionnel .....	page 8
2. Milieu tridimensionnel .....	page 11
Généralités .....	page 11
Onde P .....	page 12
Onde S .....	page 15

**Troisième partie : Les Milieux Anisotropes Absorbants**

1. Méthode par convolution .....	page 18
a. Problèmes harmoniques	
b. Propagation des ondes	
2. Méthode utilisant le tenseur dissipatif .....	page 21
a. Cas général	
b. Cas particulier : le système cubique	

**Quatrième partie : Ellipticité et Produit Simple .....** page 23**Conclusions .....** page 25**Références .....** page 26**Une petite note humoristique .....** page 27

PREMIERE PARTIE : PROSPECTION PETROLIERE

1. Des sons chasseurs de pétrole

Les hydrocarbures sont piégés dans des couches géologiques poreuses à des profondeurs aussi diverses que variées. Le but des compagnies pétrolières est de forer "à coup sûr". Il leur faut donc connaître la nature du sous-sol. Or, les ondes sonores sont déviées, réfléchies, atténuées et elles changent de polarisation lorsqu'elles se propagent à travers les couches géologiques. La forme de ces changements étant fonction de la nature des couches traversées, les sons sont devenus des "chasseurs de primes".

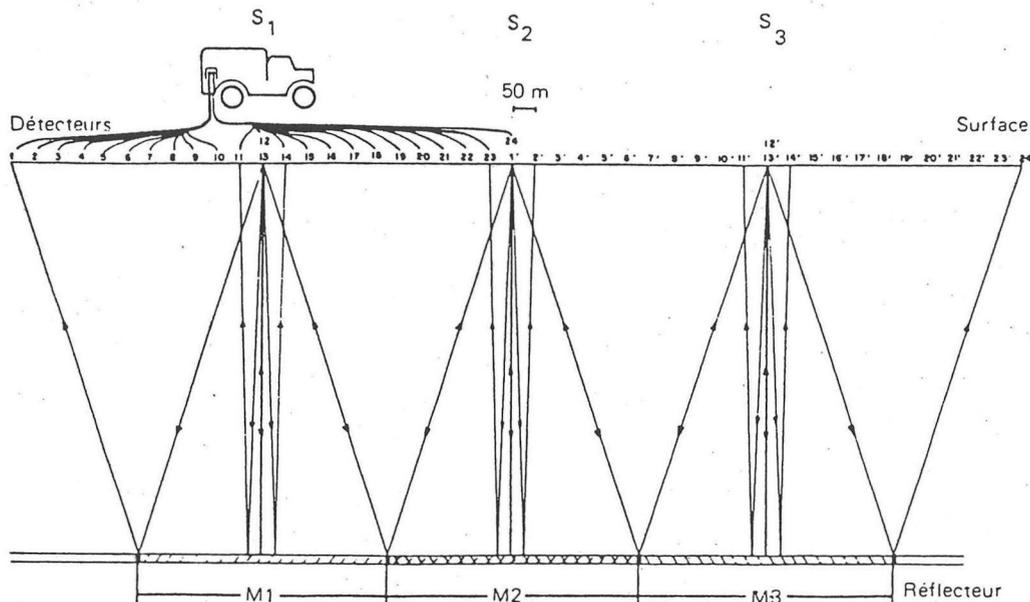
2. La sismique de puits

Il existe 2 sortes de sismiques : la sismique de surface et la sismique de puits, et à l'intérieur de ces 2 catégories on trouve encore la sismique terrestre et la sismique marine.

La sismique marine utilise des hydrophones pour capter le signal, tandis que la sismique terrestre utilise des géophones.

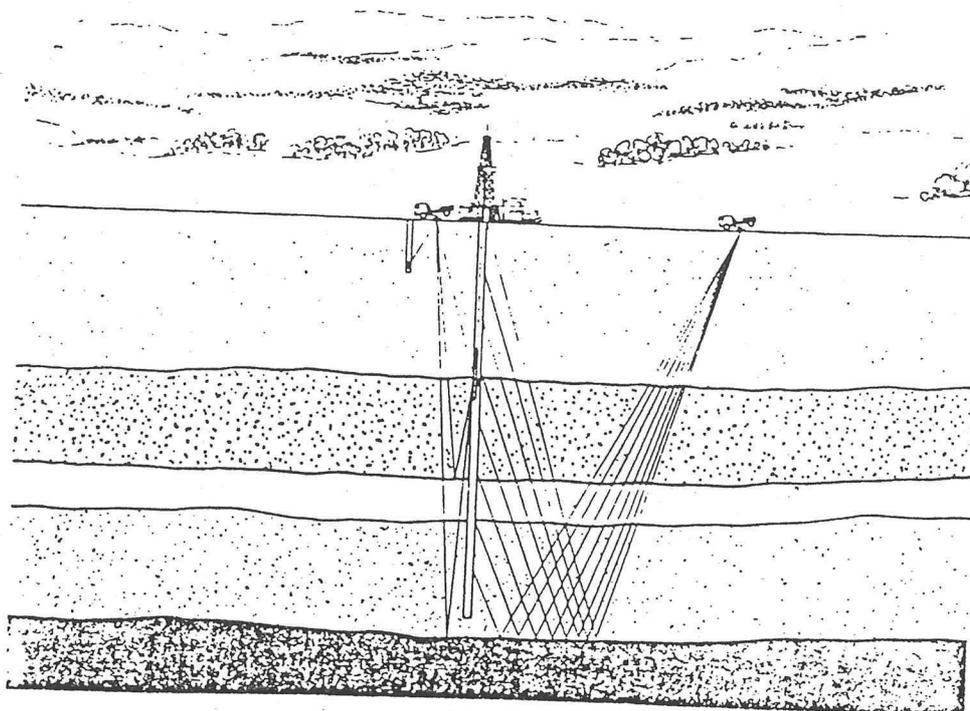
Ces géophones, suivant leur degré de sophistication, peuvent enregistrer 1, 2 ou 3 composantes, mais nous reviendrons là-dessus plus loin.

La sismique de surface consiste à disposer en surface des géophones (le plus souvent alignés) et utilise surtout les ondes réfléchies.

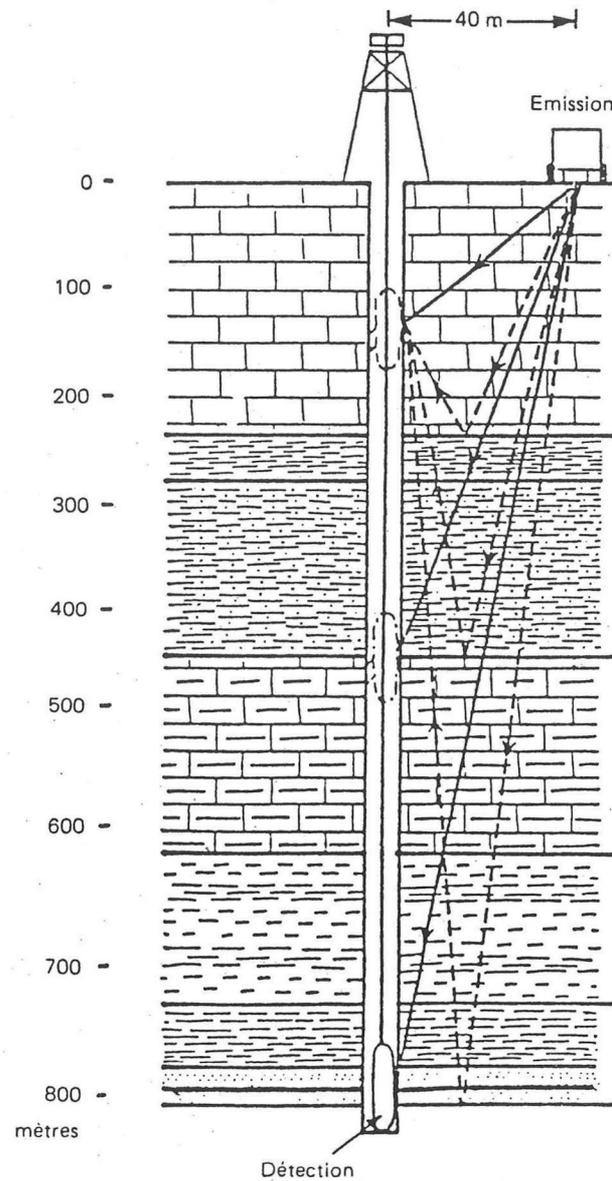


La sismique de surface

La sismique de puits quant à elle utilise des géophones régulièrement répartis dans un puits. On obtient, suivant l'endroit où l'on met la source sismique (camion vibreur, charge explosive, etc...) des profils sismiques verticaux (P.S.V.) ou des profils sismiques obliques (P.S.O.). On utilise aussi bien les ondes en réflexion qu'en transmission.  
La sismique de puits est de plus en plus utilisée.



Profil Sismique Vertical et Profil Sismique Oblique



Profil Sismique Vertical  
Utilisation des ondes réfléchies et transmises

### 3. La détection à 3 composantes

Les ondes sonores peuvent se décomposer en 2 types de polarisation d'ondes, les ondes de compression dites ondes P et les ondes de cisaillement dites ondes S (qui se subdivisent encore en ondes SV et SH).

Par ailleurs, les ondes peuvent avoir une polarisation linéaire, circulaire, ou elliptique.

Lorsqu'on examine de près un P.S.V. ou un P.S.O. on s'aperçoit que l'ellipticité des ondes varie en fonction de la profondeur. Ces changements sont dus aux propriétés des milieux traversés. On assiste en outre à une atténuation de l'onde au fur et à mesure de sa propagation.

De plus, les ondes S ne se propagent pas dans les liquides et les gaz tandis que les ondes P ne sont nullement incommodées par ceux-ci. Il en résulte que les ondes S traverseront moins bien un milieu poreux où du pétrole a élu domicile, et beaucoup moins les poches de gaz. Ceci permet bien sûr de caractériser de tels milieux. Toutefois, tout n'est pas si simple, en effet, les hydrocarbures ne sont pas uniquement liquides ou gazeux en sous-sol (le bitume par exemple tient plus du solide que du liquide), et une roche peut être plus ou moins "poreuse".

Cependant, cette méthode reste un bon critère, à condition de savoir différencier les ondes...

C'est pour cela qu'il est bon d'utiliser des géophones à 3 composantes plutôt qu'à une seule, bien que cela augmente considérablement le volume de données à traiter. Et cela est d'autant plus important lorsqu'on veut mettre sur pied un essai comportant des géophones à 3 composantes très rapprochés spatialement.

Il paraît pourtant indispensable de développer des méthodes de traitement à 3 composantes (même si on ne peut pas installer un géophone tous les mètres), et donc de pousser plus loin les études théoriques dans ce domaine.

Ceci rejoint le sujet du stage, motivé par une question de Charles Naville : Existe-t'il des relations théoriques générales permettant de dire quelque chose sur la forme relative des modes propres d'ondes volumiques acoustiques dans les milieux viscoélastiques? D'où l'étude bibliographique et les considérations théoriques jointes.

DEUXIEME PARTIE : LES MILIEUX ISOTROPES ABSORBANTS

1. Milieu Unidimensionnel

Si on considere des materiaux non vieillissants et lineaires, on introduit une fonction de fluage  $f$  et une fonction de relaxation  $r$  de la maniere suivante:

$$s(\tau) = t_0 f(\tau - \tau_0) \quad \text{et} \quad t(\tau) = s_0 r(\tau - \tau_0)$$

ou  $s$  est la deformation et  $t$  est la contrainte.

Ces deux relations s'integrent en :

$$s(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} f(\tau - \xi) \cdot (dt/d\xi) \cdot d\xi$$

et:

$$t(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} r(\tau - \xi) \cdot (ds/d\xi) \cdot d\xi$$

Or, le principe de causalite implique que la contrainte  $t$  ne soit pas influencee par les valeurs futures de la deformation  $s$ .

On a alors :

$$t(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(\tau - \xi) \cdot (ds/d\xi) \cdot d\xi \quad \text{avec} \quad r(\tau) = 0 \text{ pour } \tau < 0$$

Integrans par parties :

$$t(\tau) = [r(\tau - \xi)s(\xi)]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} (dr/d\xi)(\tau - \xi) \cdot s(\xi) \cdot d\xi$$

D'ou :

$$t(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\tau - \xi) \cdot s(\xi) \cdot d\xi \quad \text{avec} \quad c = dr/d\xi$$

Cette relation peut se mettre sous la forme :  $t = c * s$   
 ou  $c$  est la constante elastique du milieu

Prenons la transformee de Fourier de cette relation, on obtient :

$$T = C \cdot S$$

ou  $T$  est la transformee de Fourier de  $t$   
 $C$  est la transformee de Fourier de  $c$   
 $S$  est la transformee de Fourier de  $s$

En effet, la transformee de Fourier d'un produit de convolution est un produit simple.

Le coefficient  $C$  est donc la transformee de Fourier du coefficient  $c$  qui n'est autre que la "constante" elastique du milieu.

Ainsi :  $C(f) = C_r(f) + i C_i(f)$

ou  $C_r(f)$  et  $C_i(f)$  sont les parties reelles et imaginaires de  $C(f)$ .

Considérons maintenant un problème harmonique :

La déformation est :  $s(t) = s_0 \cdot \exp(2\pi i f_0 t)$

$$\text{Alors : } S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_0 \cdot \exp(2\pi i f_0 t) \cdot \exp(-2\pi i f t) \cdot dt$$

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_0 \cdot \exp(2\pi i (f_0 - f)t) \cdot dt$$

$$S(f) = s_0 \cdot \delta(f - f_0)$$

Ainsi, la relation  $T = C \cdot S$  devient :  $T(f) = s_0 \cdot \delta(f - f_0) \cdot C(f_0)$

$$\text{D'où : } T(f) = s_0 \cdot (C_r(f_0) + i C_i(f_0)) \cdot \delta(f - f_0)$$

$$\text{Ainsi : } T(f) = s_0 \cdot |C(f_0)| \cdot \exp(i\varphi(f_0)) \cdot \delta(f - f_0)$$

ou :  $|C(f_0)|$  est le module de  $C(f_0)$  et  $\varphi(f_0)$  est la phase de  $C(f_0)$ .

On obtient alors, en prenant la transformée de Fourier inverse du résultat précédent :

$$t(\tau) = s_0 \cdot |C(f_0)| \cdot \exp(i\varphi(f_0)) \cdot \exp(2\pi i f_0 \tau)$$

$$\text{C'est à dire : } t(\tau) = s_0 \cdot |C(f_0)| \cdot \cos(2\pi f_0 \tau + \varphi(f_0))$$

Expression de la contrainte en fonction du temps.

La contrainte et la déformation sont donc déphasées de  $\varphi(f_0)$ .  
Ce déphasage est lié à la viscosité du milieu.  
Il est responsable de la perte d'énergie, donc de l'atténuation.

Intéressons nous maintenant à la propagation de telles ondes :

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit :  $p \cdot d^2u/d\tau^2 = dt/dx$

$$\text{Or, } t = c * s, \text{ donc : } p \cdot d^2u/d\tau^2 = d(c*s)/dx$$

où  $\rho$  est la densité.

De plus,  $c$  est indépendant de  $x$ , et dans le cas unidimensionnel :  $s = du/dx$

$$\text{On obtient alors : } p \cdot d^2u/d\tau^2 = c * d^2u/dx^2$$

Considérons une onde ayant la forme suivante :  $u(x, t) = u_0 \cdot \exp(i \cdot \omega_0 \cdot t - ikx)$

Où  $k = b - i \cdot a$   $b$  et  $a$  étant réels.

$$\text{Ainsi, on a : } u(x, t) = u_0 \cdot \exp(-ax) \cdot \exp(i\omega_0 t - ibx)$$

En reportant cette expression dans l'équation différentielle, on obtient :

$$-p \cdot \omega_0^2 \cdot u_0 \cdot \exp(-ax) \cdot \exp(i\omega_0 t - ibx) = c * (-u_0 \cdot (b - ia)^2 \cdot \exp(-ax) \cdot \exp(i\omega_0 t - ibx))$$

$$\text{D'où, en prenant la transformée de Fourier : } p\omega_0^2 = C(\omega_0) \cdot (b - ia)^2$$

$$\text{C'est à dire : } p\omega_0^2 = (C_r(\omega_0) + i C_i(\omega_0)) \cdot (b^2 - a^2 - 2iab)$$

D'où en développant et en séparant les parties réelles et imaginaires :

$$p\omega_0^2 = C_r(\omega_0) \cdot (b^2 - a^2) + 2ab \cdot C_i(\omega_0)$$

et

$$C_i(\omega_0) \cdot (b^2 - a^2) - 2ab \cdot C_r(\omega_0) = 0$$

$$\text{Donc : } b^2 - a^2 = 2ab \cdot C_r / C_i$$

$$\text{Ainsi : } p\omega^2 = 2ab \cdot |C|^2 / C_i$$

$$\text{D'où : } ab = p\omega^2 \cdot C_i / 2|C|^2$$

Donc, en reportant et en multipliant par  $b^2$ , on obtient :

$$b^4 - b^2 \cdot p\omega^2 \cdot C_r / |C|^2 - p^2 \cdot \omega^4 \cdot C_i^2 / 4|C|^4 = 0$$

Cette equation est une equation bicarree en  $b$ , il suffit de la resoudre comme une equation du second degre, sachant que  $b$  est reel donc  $b^2$  est positif.

$$\text{On a donc : } b^2 = p\omega^2 \cdot (|C| + C_r) / 2|C|^2$$

Or  $b$  est positif (propagation dans le sens des  $x$  croissants), donc :

$$b = \omega \cdot \sqrt{p \cdot (|C| + C_r) / 2|C|^2}$$

$$\text{et on a : } a = p\omega^2 C_i / 2b|C|^2$$

$$\text{Donc } a = \omega \cdot \sqrt{p \cdot (|C| - C_r) / 2|C|^2}$$

## 2. Milieu Tridimensionnel

Pour un matériau isotrope, on utilise les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  définis par la loi de Hooke :

$$\lambda \cdot \text{div}(\vec{u}) \cdot \delta_{ij} + 2\mu S_{ij} = T_{ij} \quad \text{let } \mu \in \mathbb{C}$$

avec  $S_{ij} = 0,5 \cdot (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i)$

On décompose le vecteur  $\vec{u}$  en une composante de dilatation et une composante de cisaillement :

$$\vec{u} = \vec{u}_p + \vec{u}_s$$

$\vec{u}_p$  correspondant a la dilatation et  $\vec{u}_s$  au cisaillement.

On a :  $\vec{u}_p = \text{grad } \varphi$  et  $\vec{u}_s = \text{rot } \vec{\psi}$

La Relation Fondamentale de la Dynamique s'écrit :

$$\rho \partial^2 u_i / \partial t^2 = \partial T_{ij} / \partial x_j$$

Donc, en remplaçant, on obtient :

$$\begin{aligned} \rho \partial^2 u_i / \partial t^2 &= \lambda \text{div}(\vec{u}) \cdot \delta_{ij} / dx_j + 2\mu dS_{ij} / dx_j \\ &= \lambda (\delta_{ij} \cdot \partial u_k / \partial x_k) / dx_j + \mu (d^2 u_i / dx_j^2 + d^2 u_j / dx_i dx_j) \\ &= \lambda d^2 u_k / dx_k dx_i + \mu d^2 u_i / dx_j^2 + \mu d^2 u_j / dx_i dx_j \\ &= (\lambda + \mu) \cdot d^2 u_j / dx_i dx_j + \mu d^2 u_i / dx_j dx_j \end{aligned}$$

Ainsi :  $\rho \cdot d^2 \vec{u} / dt^2 = (\lambda + \mu) \cdot \text{grad}(\text{div}(\vec{u})) + \mu \nabla^2 \vec{u}$

Alors, on obtient :  $\nabla^2 \varphi + k_p^2 \varphi = 0$  et  $\nabla^2 \vec{\psi} + k_s^2 \vec{\psi} = \vec{0}$

où :  $k_p = \omega \sqrt{\frac{\rho}{2\lambda + \mu}}$  et  $k_s = \omega \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}$   $k_p$  et  $k_s \in \mathbb{C}$

Onde P :

$$\nabla^2 \varphi + k_p^2 \varphi = 0$$

$\varphi$  est de la forme :  $\varphi = \varphi_0 \cdot \exp(i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r})$

ou  $\vec{k} = \vec{b} - i \cdot \vec{a}$

Ainsi :  $\varphi = \varphi_0 \cdot \exp(-\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot \exp(i\omega t - i\vec{b} \cdot \vec{r})$

D'où :  $d\varphi/dx = -i(b_x - ia_x) \cdot \varphi$

et :  $d^2\varphi/dx^2 = -(b_x - ia_x)^2 \cdot \varphi$

Donc, en reportant dans l'équation différentielle, on a :  $-(b-ia)^2 + k_p^2 = 0$

C'est à dire :  $-(b^2 - a^2 - 2i\vec{a} \cdot \vec{b}) + k_p^2 = 0$

Posons :  $kr = \text{Re}(k_p^2)$

$ki = -\text{Im}(k_p^2)$

$A = \text{angle}(\vec{b}, \vec{a})$

On obtient alors :  $kr = b^2 - a^2$

$ki = +2\vec{b} \cdot \vec{a} = +2ba \cdot \cos A$

D'où :  $a = ki / 2b \cdot \cos A$

En reportant dans la première équation, on obtient :

$b^2 - ki^2 / 4b^2 \cos^2 A = kr$

Donc :  $b^4 - kr \cdot b^2 - ki^2 / 4 \cos^2 A = 0$

Equation bicarrée en b qui se résout en :

$$b = \sqrt{0,5 \cdot (kr + (kr^2 + ki^2 / \cos^2 A)^{1/2})}$$

et :  $a = ki / 2 \cos A \cdot \sqrt{0,5 \cdot (kr + (kr^2 + ki^2 / \cos^2 A)^{1/2})}$

C'est à dire :  $a = \sqrt{0,5 \cdot (-kr + (kr^2 + ki^2 / \cos^2 A)^{1/2})}$

Mouvement des particules

Posons :  $k_p = k_1 + i.k_2$

$$\vec{z}_1 = (k_1 \vec{b} - k_2 \vec{a}) / |k_p|^2$$

$$\vec{z}_2 = (k_2 \vec{b} + k_1 \vec{a}) / |k_p|^2$$

Les vecteurs  $\vec{z}_1$  et  $\vec{z}_2$  sont des vecteurs réels.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 &= (k_1 \vec{b} - k_2 \vec{a}) \cdot (k_2 \vec{b} + k_1 \vec{a}) / |k_p|^4 \\ &= (k_1 k_2 (b^2 - a^2) + (k_1^2 - k_2^2) \vec{a} \cdot \vec{b}) / |k_p|^4 \\ &= (k_1 k_2 k_r - 0,5 \cdot (k_1^2 + k_2^2) \cdot k_i) / |k_p|^4 \end{aligned}$$

$$\text{Or : } k_p^2 = k_r - i \cdot k_i = (k_1 + i \cdot k_2)^2 = k_1^2 - k_2^2 + 2i k_1 k_2$$

$$\text{Ainsi : } \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 = (k_1 k_2 \cdot (k_1^2 - k_2^2) - 0,5 \cdot (k_1^2 - k_2^2) \cdot 2k_1 k_2) / |k_p|^4$$

$$\text{Donc : } \vec{z}_1 \cdot \vec{z}_2 = 0$$

Les 2 vecteurs  $\vec{z}_1$  et  $\vec{z}_2$  sont donc orthogonaux.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \vec{z}_1^2 - \vec{z}_2^2 &= (k_1^2 b^2 + k_2^2 a^2 - 2k_1 k_2 \vec{b} \cdot \vec{a} - k_2^2 b^2 - k_1^2 a^2 - 2k_1 k_2 \vec{b} \cdot \vec{a}) / |k_p|^4 \\ &= ((k_1^2 - k_2^2) \cdot (b^2 - a^2) - 4k_1 k_2 \vec{b} \cdot \vec{a}) / |k_p|^4 \\ &= (k_r \cdot k_r + k_i \cdot k_i) / |k_p|^4 \\ &= |k_p^2|^2 / |k_p|^4 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \vec{z}_1^2 - \vec{z}_2^2 = 1$$

$$\text{Ainsi : } |\vec{z}_1| > |\vec{z}_2|$$

$$\text{De plus : } \vec{z}_1 - i\vec{z}_2 = ((k_1 - ik_2)\vec{b} - (ik_1 + k_2)\vec{a}) / |k_p|^2$$

En multipliant en haut et en bas par  $k_p = k_1 - ik_2$ , on obtient :

$$\vec{z}_1 - i\vec{z}_2 = ((k_1^2 + k_2^2)\vec{b} - i(k_1^2 + k_2^2)\vec{a}) / |k_p|^2 \cdot k_p$$

$$\text{Donc : } \vec{z}_1 - i\vec{z}_2 = (\vec{b} - i \cdot \vec{a}) / k_p$$

Intéressons nous maintenant à  $\vec{u}_p = \text{Re}(\overrightarrow{\text{grad}}\Psi)$

$$\begin{aligned} \vec{u}_p &= \text{Re}(\overrightarrow{\text{grad}}(\varphi_0 \cdot \exp(i\omega t - i(\vec{b} - i\vec{a}) \cdot \vec{r})) ) \\ &= \text{Re}(-i(\vec{b} - i\vec{a}) \cdot \varphi_0 \cdot \exp(i\omega t - i(\vec{b} - i\vec{a}) \cdot \vec{r})) \\ &= \text{Re}(-ik_p \cdot (\vec{z}_1 - i\vec{z}_2) \cdot \varphi_0 \cdot \exp(i\omega t - i(\vec{b} - i\vec{a}) \cdot \vec{r})) \\ &= \text{Re}(-ik_p \cdot \varphi_0 \cdot (\vec{z}_1 - i\vec{z}_2) \cdot \exp(-\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot \exp(i\omega t - i\vec{b} \cdot \vec{r})) \\ &= \text{Re}(ik_p \cdot \varphi_0 \cdot (\vec{z}_1 - i\vec{z}_2) \cdot \exp(-\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot \exp(i\omega t - i\vec{b} \cdot \vec{r} + \text{Arg}(k_p \cdot \varphi_0) - \pi/2)) \\ &= ik_p \cdot \varphi_0 \cdot \exp(-\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot \text{Re}(\cos B(t) + i \sin B(t)) \cdot (\vec{z}_1 - i\vec{z}_2) \end{aligned}$$

Avec :  $B(t) = \omega t - \vec{b} \cdot \vec{r} + \text{Arg}(k_p \cdot \varphi_0) - \pi/2$

On a :  $\vec{u}_p = ik_p \cdot \varphi_0 \cdot \exp(-\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot (\cos B(t) \cdot \vec{z}_1 + \sin B(t) \cdot \vec{z}_2)$

On obtient donc une ellipse de grand axe :  $ik_p \cdot \varphi_0 \cdot \exp(-\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{z}_1$   
 et de petit axe :  $ik_p \cdot \varphi_0 \cdot \exp(-\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{z}_2$

L'ellipticité est :  $|\vec{z}_1|/|\vec{z}_2|$

L'angle C entre  $\vec{b}$  et le grand axe  $\vec{z}_1$  de l'ellipse est défini par :

$$\cos C = \vec{b} \cdot \vec{z}_1 / |\vec{b}| \cdot |\vec{z}_1|$$

$$\cos C = (k_1 b^2 - k_2 \vec{a} \cdot \vec{b}) / b \cdot |k_1 \vec{b} - k_2 \vec{a}|$$

Cas particulier d'une onde P homogène

Les plans équiphasés sont alors des plans d'amplitude constante.

Donc  $\text{angle}(\vec{b}, \vec{a}) = 0$  c'est à dire  $A = 0$

$$\begin{aligned} \text{Alors : } b &= (0,5 \cdot (kr + |k_p|^2))^{1/2} \\ &= (0,5 \cdot (k_1^2 - k_2^2 + k_1^2 + k_2^2))^{1/2} \end{aligned}$$

Donc :  $b = k_1$

Et :  $a = -2k_1 k_2 / 2k_1$

Donc :  $a = -k_2$

Par conséquent :  $\vec{z}_1 = \vec{b} / |\vec{b}|$  et  $\vec{z}_2 = \vec{0}$

Et :  $\cos C = \vec{z}_1 \cdot \vec{b} / |\vec{z}_1| |\vec{b}| = 1$

Donc : L'angle entre  $\vec{b}$  et l'axe  $\vec{z}_1$  est nul.

La trajectoire est alors une ellipse dégénérée, c'est à dire un segment de droite. Le mouvement est parallèle à la direction de propagation.

Onde S :

$$\vec{u}_S = \text{Re}(\vec{\nabla} \wedge \vec{\Psi})$$

$\vec{\Psi}$  verifie l'equation differentielle :  $\vec{\nabla}^2 \vec{\Psi} + k_S^2 \vec{\Psi} = \vec{0}$  avec  $\text{div}(\vec{\Psi}) = 0$

$\vec{\Psi}$  est de la forme :  $\vec{\Psi} = \vec{\Psi}_0 \cdot \exp(-\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot \exp(i\omega t - i\vec{b} \cdot \vec{r})$

En reprenant les calculs effectués pour l'onde P, on obtient en ce qui concerne l'onde S :

$$b = \sqrt{0,5 \cdot (kr + (kr^2 + ki^2 / \cos^2 A)^{1/2})}$$

$$\text{et } a = \sqrt{0,5 \cdot (-kr + (kr^2 + ki^2 / \cos^2 A)^{1/2})}$$

avec :  $kr = \text{Re}(k_S^2)$

$$ki = -\text{Im}(k_S^2)$$

$$A = \text{angle}(\vec{b}, \vec{a})$$

#### Mouvement des particules

Posons :  $k_S = k_1 + ik_2$

Supposons  $\vec{\Psi}_0 = \Psi_0 \cdot \vec{n}$

$$\text{Soit : } \vec{Z}_1 = (k_1 \vec{b} - k_2 \vec{a}) \wedge \vec{n} / |k_S|^2$$

$$\vec{Z}_2 = (k_2 \vec{b} + k_1 \vec{a}) \wedge \vec{n} / |k_S|^2$$

Les vecteurs  $\vec{Z}_1$  et  $\vec{Z}_2$  sont des vecteurs reels.

On a :  $\text{div}(\vec{\Psi}) = 0$  donc :  $(\vec{a} + i\vec{b}) \cdot \vec{n} = 0$

Donc, en identifiant parties reelles et imaginaires, on obtient :

$$\vec{b} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{a} \cdot \vec{n} = 0$$

Ainsi, le vecteur  $\vec{n}$  est orthogonal a  $\vec{a}$  et a  $\vec{b}$ .

$$\text{On a : } \vec{Z}_1 \cdot \vec{Z}_2 = ((k_1 \vec{b} - k_2 \vec{a}) \wedge \vec{n}) \cdot ((k_2 \vec{b} + k_1 \vec{a}) \wedge \vec{n}) / |k_S|^4$$

$$\text{Or, } (k_1 \vec{b} - k_2 \vec{a}) \cdot (k_2 \vec{b} + k_1 \vec{a}) = 0$$

$$\text{Donc : } \vec{Z}_1 \cdot \vec{Z}_2 = 0$$

Les 2 vecteurs  $\vec{Z}_1$  et  $\vec{Z}_2$  sont donc orthogonaux.

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \vec{Z}_1^2 - \vec{Z}_2^2 &= (k_1^2 b^2 + k_2^2 a^2 - 2k_1 k_2 \vec{b} \cdot \vec{a} - k_2^2 b^2 - k_1^2 a^2 - 2k_1 k_2 \vec{b} \cdot \vec{a}) / |k_p|^4 \\ &= ((k_1^2 - k_2^2) \cdot (b^2 - a^2) - 4k_1 k_2 \vec{b} \cdot \vec{a}) / |k_p|^4 \\ &= (k_r \cdot k_r + k_l \cdot k_l) / |k_p|^4 \\ &= |k_p^2|^2 / |k_p|^4 \end{aligned}$$

Donc :  $\vec{Z}_1^2 - \vec{Z}_2^2 = 1$

Ainsi :  $|\vec{Z}_1| > |\vec{Z}_2|$

De plus :  $\vec{Z}_1 - i\vec{Z}_2 = ((k_1 - ik_2)\vec{b} - (ik_1 + k_2)\vec{a}) \wedge \vec{n} / |k_p|^2$

En multipliant en haut et en bas par  $k_p = k_1 - ik_2$ , on obtient :

$$\vec{Z}_1 - i\vec{Z}_2 = ((k_1^2 + k_2^2)\vec{b} - i(k_1^2 + k_2^2)\vec{a}) \wedge \vec{n} / |k_p|^2 \cdot k_p$$

Donc :  $\vec{Z}_1 - i\vec{Z}_2 = (\vec{b} - i\vec{a}) \wedge \vec{n} / k_p$

Interessons nous maintenant à  $\vec{u}_S = \text{Re}(\vec{r} \otimes \vec{V})$

$$\begin{aligned} \vec{u}_S &= \text{Re}(\vec{r} \otimes (\Psi_0 \cdot \vec{n} \cdot \exp(i\omega t - i(\vec{b} - i\vec{a}) \cdot \vec{r}))) \\ &= \text{Re}(-i(\vec{b} - i\vec{a}) \wedge \Psi_0 \cdot \vec{n} \cdot \exp(i\omega t - i(\vec{b} - i\vec{a}) \cdot \vec{r})) \\ &= \text{Re}(-ik_S \cdot (\vec{Z}_1 - i\vec{Z}_2) \cdot \Psi_0 \cdot \exp(i\omega t - i(\vec{b} - i\vec{a}) \cdot \vec{r})) \\ &= \text{Re}(-ik_S \cdot \Psi_0 \cdot (\vec{Z}_1 - i\vec{Z}_2) \cdot \exp(-\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot \exp(i\omega t - i\vec{b} \cdot \vec{r})) \\ &= \text{Re}(|k_p \cdot \Psi_0| \cdot (\vec{Z}_1 - i\vec{Z}_2) \cdot \exp(-\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot \exp(i\omega t - i\vec{b} \cdot \vec{r} + \text{Arg}(k_S \cdot \Psi_0) - \pi/2)) \\ &= |k_S \cdot \Psi_0| \cdot \exp(-\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot \text{Re}((\cos B(t) + i \cdot \sin B(t)) \cdot (\vec{Z}_1 - i\vec{Z}_2)) \end{aligned}$$

Avec :  $B(t) = \omega t - \vec{b} \cdot \vec{r} + \text{Arg}(k_S \cdot \Psi_0) - \pi/2$

On a :  $\vec{u}_S = |k_S \cdot \Psi_0| \cdot \exp(-\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot (\cos B(t) \cdot \vec{Z}_1 + \sin B(t) \cdot \vec{Z}_2)$

On obtient donc une ellipse de grand axe :  $|k_S \cdot \Psi_0| \cdot \exp(-\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{Z}_1$   
 et de petit axe :  $|k_S \cdot \Psi_0| \cdot \exp(-\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{Z}_2$

Cette ellipse se situe dans le plan  $(\vec{Z}_1, \vec{Z}_2)$   
 On appelle cette onde, une onde S de type I.

L'ellipticité est :  $|\vec{Z}_1|/|\vec{Z}_2|$

L'angle C entre  $\vec{b}$  et le grand axe  $\vec{Z}_1$  de l'ellipse est défini par :

$$\cos C = \vec{b} \cdot \vec{Z}_1 / |\vec{b}| \cdot |\vec{Z}_1|$$

Supposons  $\vec{\Psi} = \Psi_1 \cdot \vec{x}_1 + \Psi_3 \cdot \vec{x}_3$  :

Où les vecteurs  $\vec{b}$  et  $\vec{a}$  appartiennent au plan  $(\vec{x}_1, \vec{x}_3)$

On a :  $\vec{u}_S = \text{Re}(\vec{r} \otimes \vec{\Psi})$

$$= \text{Re}(-(\vec{a} + i\vec{b}) \wedge \vec{\Psi})$$

$$= \text{Re}(-i(\vec{b} - i\vec{a}) \wedge (\Psi_1 \vec{x}_1 + \Psi_3 \vec{x}_3) \cdot \exp(-\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot \exp(i\omega t - i\vec{b} \cdot \vec{r}))$$

Posons :  $\vec{b} = b_1 \vec{x}_1 + b_3 \vec{x}_3$

et :  $\vec{a} = a_1 \vec{x}_1 + a_3 \vec{x}_3$

On obtient alors :

$$u_S = \text{Re}(-i((b_1 - ia_1)\vec{x}_1 + (b_3 - ia_3)\vec{x}_3) \wedge (\Psi_1 \vec{x}_1 + \Psi_3 \vec{x}_3) \cdot \exp(-\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot \exp(i\omega t - i\vec{b} \cdot \vec{r}))$$

$$u_S = \text{Re}(-i(-(b_1 - ia_1)\Psi_3 + (b_3 - ia_3)\Psi_1) \cdot \vec{x}_2 \cdot \exp(-\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot \exp(i\omega t - i\vec{b} \cdot \vec{r}))$$

$$u_S = \text{Re}(-i(\vec{b} - i\vec{a}) \cdot (-\Psi_3 \vec{x}_1 + \Psi_1 \vec{x}_3) \cdot \exp(-\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot \exp(i\omega t - i\vec{b} \cdot \vec{r})) \cdot \vec{x}_2$$

Posons :  $D = (\vec{b} - i\vec{a}) \cdot (-\Psi_3 \vec{x}_1 + \Psi_1 \vec{x}_3)$

On a alors :  $u_S = \text{Re}(-iD \cdot \exp(-\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot \exp(i\omega t - i\vec{b} \cdot \vec{r})) \cdot \vec{x}_2$

D'où :  $u_S = |D| \cdot \exp(-\vec{a} \cdot \vec{r}) \cdot \cos(B(t)) \cdot \vec{x}_2$

Avec :  $B(t) = \omega t - \vec{b} \cdot \vec{r} + \text{Arg}(D) - \pi/2$

**Le mouvement est donc linéaire, perpendiculairement au plan  $(\vec{x}_1, \vec{x}_3)$ .**

On appelle cette onde, une onde S de type II.

Supposons  $\vec{\Psi} = \Psi_1 \vec{x}_1 + \Psi_2 \vec{x}_2 + \Psi_3 \vec{x}_3$

Dans le cas général, la trajectoire est très complexe.

Cas particulier d'une onde S de type I homogène

Les plans equiphases sont alors des plans d'amplitude constante.

Donc  $\text{angle}(\vec{b}, \vec{a}) = 0$  c'est à dire  $A = 0$

Alors :  $b = k_1$

Et :  $a = -k_2$

Par conséquent :  $\vec{z}_1 = \vec{b} \wedge \vec{n} / |\vec{b} \wedge \vec{n}|$  et  $\vec{z}_2 = \vec{0}$

Et :  $\cos C = 0$

Donc : L'angle entre  $\vec{b}$  et l'axe  $\vec{z}_1$  est un angle droit.

**La trajectoire est alors une ellipse dégénérée, c'est à dire un segment de droite. Le mouvement est perpendiculaire à la direction de propagation.**

### TROISIEME PARTIE : LES MILIEUX ANISOTROPES ABSORBANTS

#### 1. Methode par convolution

##### a. Problèmes harmoniques

Par généralisation du cas unidimensionnel, on a :  $t_I = c_{IJ} * s_J$

Donc, en prenant la transformée de Fourier, on obtient :  $T_I = C_{IJ} \cdot S_J$

Supposons un problème harmonique, c'est à dire :  $s_J = \text{Re}(s_{0J} \cdot \exp(i \cdot \omega_0 \cdot t))$

Alors, la transformée de Fourier de cette déformation est :

$$\begin{aligned} S_J &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_{0J} \cdot \exp(i\omega_0 t) \cdot \exp(-i\omega t) \cdot dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} s_{0J} \cdot \exp(2\pi i f_0 t) \cdot \exp(-2\pi i f t) \cdot dt \\ &= s_{0J} \cdot \delta(f - f_0) \end{aligned}$$

Donc,  $T_I = C_{IJ} \cdot s_{0J} \cdot \delta(f - f_0)$

Or, le tenseur des "constantes" élastiques possède une partie réelle et une partie imaginaire :  $c_{IJ} = c_{0IJ} + i \cdot a_{IJ}$

Le terme imaginaire étant bien sûr dû à l'atténuation.

En prenant la transformée de Fourier du coefficient  $c_{IJ}$ , on obtient :

$$C_{IJ} = \int_{-\infty}^{+\infty} (c_{0IJ}(t) + i \cdot a_{IJ}(t)) \cdot \exp(-2\pi i f t) \cdot dt$$

Le nouveau coefficient  $C_{IJ}$  possède une partie réelle et une partie imaginaire. On posera :  $C_{IJ}(f) = C_{0IJ}(f) + i \cdot A_{IJ}(f)$

Remarque : Bien que nous ayons pris des notations similaires,  $C_{0IJ}$  n'est pas la transformée de Fourier de  $c_{0IJ}$ , et  $A_{IJ}$  n'est pas la transformée de Fourier de  $a_{IJ}$ .

En reportant le dernier résultat obtenu dans l'expression de  $T_I$  il vient :

$$T_I = (Co_{IJ}(f) + i.A_{IJ}(f)).so_J.\delta(f-f_0)$$

Le second membre n'est non nul que pour  $f = f_0$ , donc :

$$T_I = (Co_{IJ}(f_0) + i.A_{IJ}(f_0)).so_J.\delta(f-f_0)$$

$$\text{Posons : } M_{IJ}(f) = |C_{IJ}(f)| = \sqrt{Co_{IJ}(f)^2 + A_{IJ}(f)^2}$$

$$\text{et : } \varphi(f) = \text{Arg}(C_{IJ}(f)) = \text{Arctg}(A_{IJ}(f) / Co_{IJ}(f))$$

On obtient alors :

$$T_I = so_J.M_{IJ}(f_0).\exp(i\varphi(f_0)).\delta(f-f_0)$$

D'où, en prenant la transformée de Fourier inverse du résultat précédent :

$$\begin{aligned} t_I &= \text{Re}( so_J.M_{IJ}(f_0).\exp(i\varphi(f_0)).\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f-f_0).\exp(2\pi if\tau).df ) \\ &= \text{Re}( so_J.M_{IJ}(f_0).\exp(i\varphi(f_0)).\exp(2\pi if_0\tau) ) \\ &= \text{Re}( so_J.M_{IJ}(f_0).\exp(2\pi if_0\tau + i\varphi(f_0)) ) \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } t_I = so_J.M_{IJ}(f_0).\cos(2\pi f_0\tau + \varphi(f_0))$$

Etudions le cas statique :  $f_0 \rightarrow 0$

$$\text{Alors, } t_I = so_J.M_{IJ}(0).\cos(\varphi(0))$$

$$t_I = so_J.Co_{IJ}(0)$$

On revient donc au cas linéaire élastique (Loi de Hooke), on peut interpréter cela par le fait que la viscosité n'a pas le temps de se mettre en place.

### b. Propagation des ondes

La Relation Fondamentale de la Dynamique s'écrit :

$$p.d^2u_i/dt^2 = dt_{ij}/dx_j$$

Et le tenseur des déformations est :

$$s_{ij} = 0,5.( du_i/dx_j + du_j/dx_i + (du_k/dx_i).(du_k/dx_j) )$$

Toutefois, le terme  $(du_k/dx_i).(du_k/dx_j)$  est du second ordre, donc négligeable par rapport aux 2 autres termes qui sont du premier ordre.

Par ailleurs,  $t_{ij} = c_{ijkl} * s_{kl}$  si l'on ne contracte pas les indices.

$$\text{D'où : } t_{ij} = 0,5.c_{ijkl} * ( du_k/dx_l + du_l/dx_k )$$

En injectant cette expression de  $t_{ij}$  dans la R.F.D., on obtient :

$$p.d^2u_i/dt^2 = 0,5.c_{ijkl}(t) * ( d^2u_k/dx_j dx_l + d^2u_l/dx_j dx_k )$$

Supposons que  $u_1(\vec{r}, t) = u_{01} \cdot \exp(i \cdot \omega_0 \cdot t - i \cdot \vec{k} \cdot \vec{r})$

En remplaçant  $u_1$  par cette expression dans l'équation différentielle ci-dessus, on obtient :

$$p \cdot u_{01} \cdot (i\omega_0)^2 \cdot \exp(i\omega_0 t) =$$

$$0,5 \cdot c_{ijkl} * ( ( u_{0k} \cdot (-ik_j)(-ik_l) + u_{0l} \cdot (-ik_j)(-ik_k) ) \cdot \exp(i\omega_0 t) )$$

On a donc :

$$-p \cdot \omega_0^2 u_{01} \cdot \exp(i\omega_0 t) = -0,5 c_{ijkl} * ( k_j k_l u_{0k} + k_j k_k u_{0l} ) \cdot \exp(i\omega_0 t)$$

D'où, en prenant la transformée de Fourier du résultat précédent :

$$p \omega_0^2 u_{01} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i(\omega_0 - \omega)t) \cdot dt = C_{ijkl} \cdot k_j k_k u_{01} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i(\omega_0 - \omega)t) \cdot dt$$

La dernière ligne mérite sans doute une explication. En effet, le facteur 0,5 a disparu puisque l'on retrouvait les mêmes termes (le tenseur des constantes élastiques étant symétrique). Par ailleurs, le produit de convolution a également disparu puisque la transformée de Fourier d'un produit de convolution est un produit simple.

Finalement, en posant :  $\omega = 2\pi f$  et  $\omega_0 = 2\pi f_0$ , il vient :

$$p \cdot (2\pi f_0)^2 u_{01} \cdot \delta(f - f_0) = C_{ijkl}(f) \cdot k_j k_k u_{01} \cdot \delta(f - f_0)$$

Cette expression n'a de sens que pour  $f = f_0$ . En effet, si  $f \neq f_0$  alors on obtient  $0 = 0$ .

Donc, pour  $f = f_0$ , on a :

$$p \cdot (2\pi f_0)^2 \cdot u_{01} - C_{ijkl}(f_0) \cdot k_j k_k u_{01} = 0$$

Ce qui se met sous la forme :

$$( p \cdot (2\pi f_0)^2 \cdot \delta_{11} - C_{ijkl}(f_0) \cdot k_j k_k ) \cdot u_{01} = 0$$

On obtient donc un système de 3 équations à 3 inconnues. Ce système dont tous les seconds membres sont nuls n'a de solution non nulle que si son déterminant est nul. C'est à dire :

$$| C_{ijkl}(f_0) \cdot k_j k_k - p \cdot (2\pi f_0)^2 \cdot \delta_{11} | = 0$$

Ce qui constitue la relation de dispersion du système étudié.

Il faut ensuite résoudre cette équation numériquement (c'est à dire à l'aide de moyens informatiques) en introduisant dans chaque cas particulier la matrice complexe  $C_{ijkl}$ .

## 2. Méthode utilisant le tenseur dissipatif

### a. Cas général

L.Landau et E.Lifchitz introduisent (dans le volume "Théorie de l'élasticité", chapitre 5 "Conduction thermique et viscosité dans les corps solides" à la page 192, ligne 34.7) le tenseur dissipatif  $n_{ijkl}$  relié au tenseur des contraintes et au tenseur des déformations comme suit :

$$t'_{ij} = n_{ijkl} \cdot ds_{kl}/dt$$

Ce nouveau tenseur  $n_{ijkl}$  ayant les mêmes symétries que le tenseur  $c_{ijkl}$ .

avec le nouveau tenseur des contraintes :  $T_{ij} = t_{ij} + t'_{ij}$

Ainsi :  $T_{ij} = c_{ijkl} \cdot s_{kl} + n_{ijkl} \cdot ds_{kl}/dt$

Supposons qu'on a affaire à un régime harmonique, on a donc :

$$u_i = u_{0i} \cdot \exp(i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r})$$

D'où, en reportant dans l'équation précédente :

$$T_{ij} = (c_{ijkl} + i \cdot \omega \cdot n_{ijkl}) \cdot s_{kl}$$

La Relation Fondamentale de la Dynamique étant :  $p \cdot d^2 u_i / dt^2 = dT_{ij} / dx_j$

On obtient :  $-p \omega^2 u_i = (c_{ijkl} + i \omega \cdot n_{ijkl}) \cdot ds_{kl} / dx_j$

Or,  $s_{kl} = 0,5 \cdot (du_k / dx_l + du_l / dx_k)$

D'où, en tenant compte des symétries des tenseurs  $c_{ijkl}$  et  $n_{ijkl}$  (on retrouve 2 fois les mêmes termes) :

$$p \cdot \omega^2 \cdot u_{0i} = (c_{ijkl} + i \cdot \omega \cdot n_{ijkl}) \cdot k_j k_k u_{0l}$$

De la même façon que précédemment, cette relation est un système de 3 équations à 3 inconnues sans seconds membres, donc, la relation de dispersion est donnée par la nullité du déterminant.

$$| p \cdot \omega^2 \cdot \delta_{il} - (c_{ijkl} + i \cdot \omega \cdot n_{ijkl}) \cdot k_j k_k |$$

b. Cas particulier : le système cubique

Le tenseur des constantes élastiques est alors assez simple.

En effet, seuls 3 coefficients sont indépendants.

$$\text{Posons : } C1 = c_{11} = c_{22} = c_{33}$$

$$C2 = c_{12} = c_{13} = c_{23}$$

$$C3 = c_{44} = c_{55} = c_{66}$$

$$\text{Et de la même façon : } N1 = n_{11} = n_{22} = n_{33}$$

$$N2 = n_{12} = n_{13} = n_{23}$$

$$N3 = n_{44} = n_{55} = n_{66}$$

Puisque le tenseur  $n_{IJ}$  est exactement de la même forme que le tenseur  $c_{IJ}$

$$\text{Posons encore : } S1 = C1 + i \cdot \omega_0 \cdot N1$$

$$S2 = C2 + i \cdot \omega_0 \cdot N2$$

$$S3 = C3 + i \cdot \omega_0 \cdot N3$$

Le système de 3 équations à 3 inconnues est alors :

$$\begin{cases} (S1k_1^2 + S2(k_2^2 + k_3^2) - p\omega_0^2)u_01 + (S2+S3)k_2k_1u_02 + (S2+S3)k_1k_3u_03 = 0 \\ (S2+S3)k_2k_1u_01 + (S1k_2^2 + S2(k_1^2 + k_3^2) - p\omega_0^2)u_02 + (S2+S3)k_2k_3u_03 = 0 \\ (S2+S3)k_3k_1u_01 + (S2+S3)k_3k_2u_02 + (S1k_3^2 + S2(k_1^2 + k_2^2) - p\omega_0^2)u_03 = 0 \end{cases}$$

La relation de dispersion est alors une équation de degré 6 en  $\omega_0$ . Par ailleurs, cette équation n'est pas bicarrée comme c'est le cas lorsqu'il n'y a pas d'atténuation.

QUATRIEME PARTIE : ELLIPTICITE ET PRODUIT SIMPLE

On a vu que la relation de dispersion etait une equation de degre 6 en  $\omega_0$ , et non pas de degre 3 en  $\omega_0^2$ .

Toutefois, le tenseur  $S_{ijkl} = c_{ijkl} + i.\omega_0.n_{ijkl}$  admet dans le cas general 3 valeurs propres, ce qui nous donne, dans chacun de ces modes propres, une relation de dispersion differente.

Par ailleurs, le tenseur  $n_{ijkl}$  etant symetrique, de meme que le tenseur  $c_{ijkl}$ , il en resulte que le tenseur  $S_{ijkl}$  est egalement symetrique.

Soit  $S'$  la matrice du systeme de 3 equations (voir page precedente), on a :

$$S' \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \end{pmatrix} = p.\omega_0^2 \begin{pmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ u_{03} \end{pmatrix}$$

Et  $S'$  est symetrique.

Ainsi, si l'on considere 2 vecteurs propres d'ondes S, u et v, on a :

$$S'.u = a_1.u \quad \text{et} \quad S'.v = a_2.v$$

Definissons le produit simple de 2 vecteurs u et v par :

$$t_{u,v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

si les vecteurs u et v ont respectivement pour coordonnees :

$$u = (x_1, y_1, z_1) \quad \text{et} \quad v = (x_2, y_2, z_2)$$

Remarquons des a present que ce "produit simple" est totalement different du produit scalaire, en effet, les vecteurs u et v sont complexes. Le produit scalaire hermitien etant :  $u^*.v$ , ou  $u^*$  est le "transconjugue" de u.

Ainsi, si l'on calcule le produit simple :  ${}^t u.S.v$  de 2 façons distinctes :

$${}^t u.(S'.v) = {}^t u.(a_2.v) = a_2.({}^t u.v)$$

Et, étant donné que  $S'$  est symétrique :  ${}^t S' = S'$ , donc :

$$({}^t u.S').v = ({}^t u.{}^t S'.v) = {}^t (S'.u).v = {}^t (a_1.u).v = a_1.({}^t u.v)$$

D'où, en égalant les 2 quantités ainsi trouvées :  $(a_1 - a_2).{}^t u.v = 0$

Or, en général les valeurs propres sont distinctes, donc, le produit simple de 2 vecteurs propres est nul.

Les vecteurs propres  $P$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  ne sont pas orthogonaux au sens hermitien, mais en revanche leur produit simple est nul.

Considérons maintenant un repère où la direction  $z$  est la normale au plan de l'ellipse du mode  $u$  (cela revient à projeter le mode  $v$  sur le plan du mode  $u$ )

$$\text{On obtient : } {}^t u.v = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Ce qui revient à dire que le vecteur  $v$  a pour coordonnées dans ce plan :

$$v = k * (-y_1, x_1)$$

Donc, lorsqu'on projette sur le plan de polarisation d'un des modes propres, les 2 autres modes propres sont tournés à  $90^\circ$ , avec la même forme, à un facteur convolutif près, mais les ellipses sont parcourues dans le même sens au cours du temps.

Il est clair que ce résultat permet une grande simplification des algorithmes informatiques de détection de l'anisotropie lorsqu'on cherche à mesurer également l'ellipticité des modes propres dont on sait qu'elle augmente considérablement en onde  $P$  dans la bande 50-120 Hz (Observations Galperin, Dubesset), et qui ne saurait qu'exister pour les ondes  $S$  (hypothèse à vérifier sur des données réelles).

### CONCLUSION ET SUGGESTIONS

Il a été possible d'apporter des éléments de réponse à la question de la forme relative des modes propres d'ondes transverse dans le cas général (21 coefficients pour les constantes élastiques et 21 coefficients pour les constantes dissipatives). Il reste cependant à vérifier ce résultat théorique sur des cas pratiques (ultrasons ou sismique) et de développer l'interprétation des observations en termes de géométrie interne du milieu de propagation (laminations, fracturations multiples, stratifications, pores, contraintes, etc...).

On sait par ailleurs que les ultrasons en ondes transverses font apparaître de l'anisotropie au dessus de 0,5 MHz lorsqu'on applique un champ électromagnétique. Une question intéressante à examiner serait d'estimer si ces effets sont observables dans les roches à des fréquences ultrasoniques courantes en sismique de puits (1 à 10 kHz), et à partir de quelles intensités de champ...

REFERENCES

- |                               |   |
|-------------------------------|---|
| Landau et Lifchitz            | Théorie de l'élasticité   |
| T.Bourbie O.Coussy B.Zinszner | Acoustique des milieux poreux<br>Editions Technip   |
| Borcherdt                     | JGR Mai 10, 1973, p.2442 à 2453   |
| Gal'perin                     | Vertical seismic profiling  |
| C.GRAU                        | Effet de l'atténuation visco-élastique<br>sur la polarisation des ondes sismiques<br>I.F.P. et Ecole Centrale de Lyon |

ADDENDUM AU CHAPITRE 4

(par Ch. NAVILLE)

-----

Soient  $U, V, W$  les vecteurs propres elliptiques.

Les projections  $V^P$  et  $W^P$  de  $U$  et  $W$  sur le plan de polarisation défini par  $u$  (pour une fréquence donnée) sont parallèles à un mouvement tourné de  $90^\circ$  par rapport au mouvement de  $U$  et parcouru dans le même sens dans le temps.

Illustration

Soit  $U^*$  l'orthogonal de  $U$

au sens du produit scalaire hermitien :

$$U^* \cdot U = 0 \quad (U^* = U \text{ transposé conjugué})$$

mais :  $V^P$  et  $W^P$  vérifient la nullité du produit simple :

$$U^T V^P = U^T W^P = 0 \quad (U^T = U \text{ transposé})$$

On voit que  $U^*$  et  $V^P, W^P$  ont des formes parallèles mais sont parcourus en sens contrarotatif au cours du temps.

### APPLICATIONS PRATIQUES

Si la polarisation de l'onde P est quasi linéaire, on peut réduire la recherche des modes propres d'onde S au plan perpendiculaire à la polarisation d'onde -P (la propagation). Dans ce cas, les deux modes d'onde -S sont dans le même plan et on peut faire le changement de base non unitaire défini par la matrice de passage suivante pour diagonaliser la matrice de biréfringence-dichroïsme :

$$P = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}} \begin{pmatrix} 1 & ki \\ ki & 1 \end{pmatrix} \text{Rot}(\alpha)$$

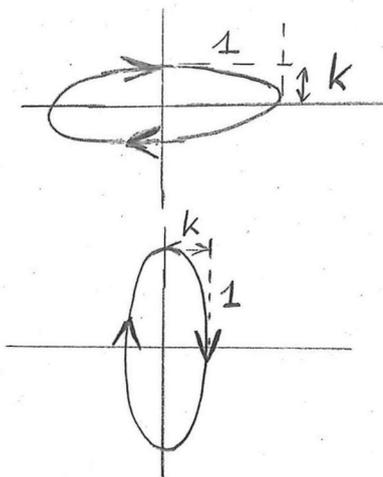
$k$  est le rapport des axes de l'ellipse et dépend de la fréquence  
 $k = k(\omega)$

$$-1 < k < 1$$

$$k = 0 : \text{mouvement linéaire}$$

$k < 0$  : mouvement dextrogyre (right handed)

$k > 0$  : mouvement lévogyre (left handed)



$$k < 0$$

$$\text{mode} \begin{pmatrix} 1 \\ ki \end{pmatrix}$$

$$\text{mode} \begin{pmatrix} ki \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\text{Rot}(\alpha)$  est une rotation pour faire coïncider le repère à la direction des axes propres des ellipses.

Naturellement, il y a un problème pour  $k = +1$ , c'est-à-dire lorsque la forme des deux modes propres est identique, circulaire et de même sens : en effet  $(1, i)$  et  $(1, -i)$  sont tels que leur auto produit ou carré est nul

$$(1 \ i) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = 0$$

Dans ce cas singulier, on a affaire à un polariseur circulaire (l'énergie émise dans la polarisation circulaire inverse se diffracte ou passe en mode d'onde P ? à voir ...).

Il y a une infinité de décomposition entre les deux modes propres identiques circulaires mais avec des atténuations et vitesses différentes.

REMARQUES : \* Pour cette même raison (le produit simple  $U^T V$  peut être nul sans que  $U$  ou  $V$  soient nuls, ou encore le produit simple n'est pas une forme bilinéaire définie), on ne peut pas effectuer systématiquement la division complexe (déconvolution) d'un vecteur complexe  $X(t) + j Y(t)$  fabriqué à partir de  $(X(t), Y(t))$  par une "signature"  $x(t) + j y(t)$  ; ( $j^2 = -1$ ) en effet il y a impossibilité lorsque  $y(t) = \pm e^{i\pi/2} x(t)$ .

Bien que cette opération soit possible dans le cas général (c'est-à-dire que pour toutes les fréquences, le signal n'est pas circulaire, ce qui n'est pas garanti), et soit très utile car elle correspond au changement défini par la matrice P écrite plus haut et ramène les nouvelles coordonnées au même temps, il lui a été préféré l'opération de changement de base unitaire et réversible suivant :

$$U = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \begin{pmatrix} 1 & -ki \\ ki & 1 \end{pmatrix} \text{ Rot } (\alpha)$$

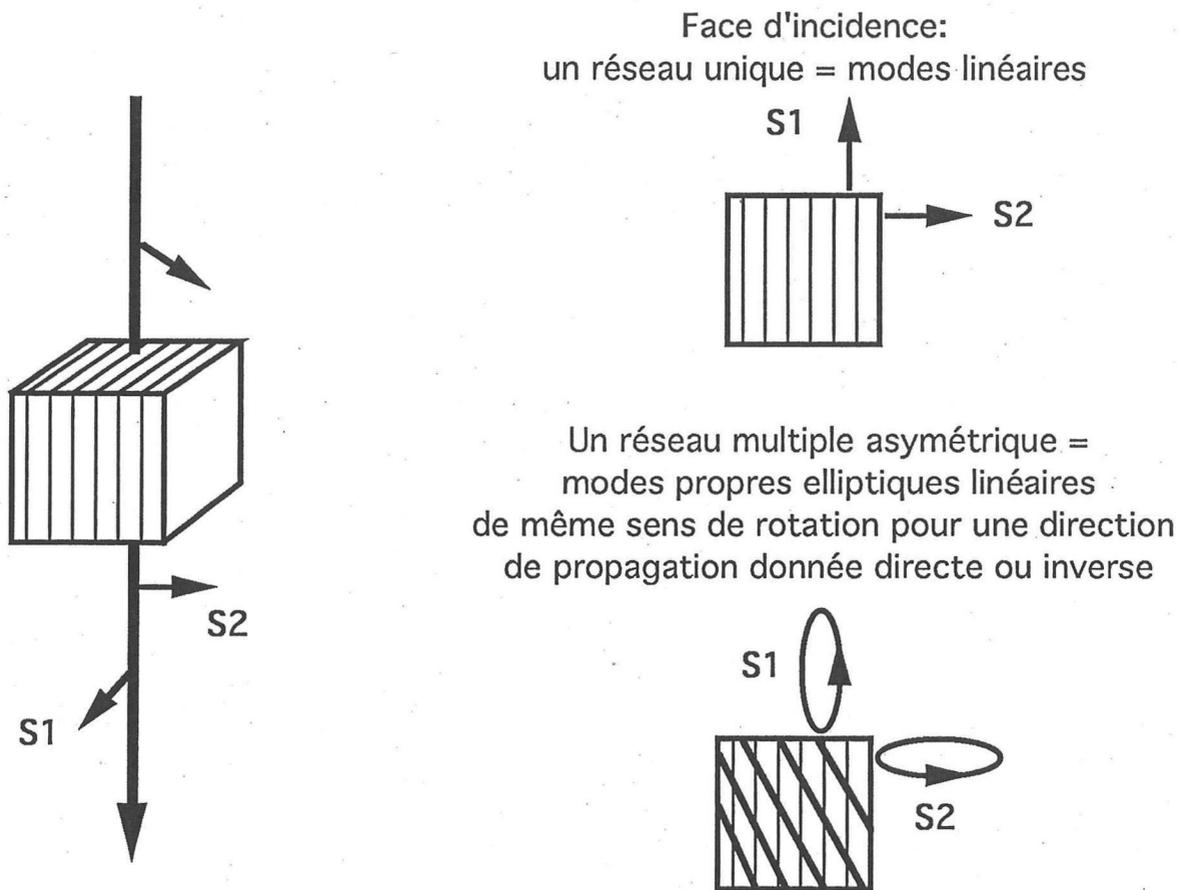
pour diagnostiquer l'anisotropie (opération produit scalaire/produit vectoriel entre deux signaux).

- \* L'ellipticité du mode P entraîne l'ellipticité systématique d'un des modes S, mais pas forcément des deux modes : par exemple, en propagation oblique dans un milieu stratifié horizontalement, P et SV peuvent être elliptiques dans le plan vertical de propagation et SH linéaire.
- \* L'interprétation de l'ellipticité peut être la schistosité du milieu ainsi que la présence de plusieurs réseaux de microfractures ouvertes de directions et morphologie différentes.

**BIREFRINGENCE ORDINAIRE = Modes propres linéaires**

ex: 1 seul réseau de fractures/contraintes uniaxial

L'onde lente S2 est en général plus atténuée que l'onde S1 rapide, parfois jusqu'à l'extinction.



Si la direction de contrainte ne coïncide pas avec la direction des fractures, ou si plusieurs réseaux de fractures sont présents avec des remplissages distincts, on peut observer des **MODES PROPRES ELLIPTIQUES** de VIBRATION. La théorie élastique prédit que ces vibrations sont de même ellipticité et de même sens de rotation (gauche ou droite), à cause de la symmétrie du tenseur des contraintes élastiques complexes: L'ellipticité vient du fait que la partie réelle du tenseur, représentant les vitesses, ne possède pas les mêmes directions propres que la partie imaginaire représentant les atténuations.

Ce phénomène n'a pas été observé en sismique de surface ou en PSV (10-60Hz), mais on s'attend à l'observer en sonique de puits (1000-3000Hz).

## PART IV : ELLIPTICITY and SIMPLE PRODUCT

Following the mathematic developments of Parts I, II and III, we saw that the dispersion relation in the case of a cubic system of homogeneous anisotropic and dissipative propagation medium was an equation of 6th degree in  $\omega_0$  ( $\omega_0$  in the French text), instead of an equation of 3rd degree in  $\omega_0^2$  ( $\omega_0^2$  in the French text).

However the tensor  $S_{ijkl} = c_{ijkl} + i \cdot \omega_0 \cdot \eta_{ijkl}$  generally has 3 eigen values, which yields a different dispersion relationship for each eigen modes. (In the original text the dissipation tensor  $\eta_{ijkl}$  was noted  $n_{ijkl}$ ).

As the tensor  $\eta_{ijkl}$  is symmetric, as well as tensor  $c_{ijkl}$ , the tensor  $S_{ijkl}$  is also symmetric.

Let  $S'$  be the matrix of the 3 equation system of the relation of dispersion ( bottom of page 22 , part III of the original French report), we can write :

$$S' \begin{pmatrix} u_{o1} \\ u_{o2} \\ u_{o3} \end{pmatrix} = \rho \cdot \omega_0^2 \begin{pmatrix} u_{o1} \\ u_{o2} \\ u_{o3} \end{pmatrix}$$

And  $S'$  is symmetric.

Thus, considering 2 eigen complex vectors of S-wave displacement, noted  $u$  and  $v$ , we have :  
 $S' \cdot u = a_1 \cdot u$  and  $S' \cdot v = a_2 \cdot v$  ( $a_1, a_2$  eigen values)

Let us define the simple product ( convolutional ) of 2 displacement vectors as :

$${}^t u \cdot v = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \quad \text{with } u = (x_1, y_1, z_1) \text{ and } v = (x_2, y_2, z_2)$$

Note that the « simple product » is quite different from the scalar product, as the vectors  $u$  and  $v$  are complex. The hermitian scalar product being  $u^* \cdot v$  where  $u^*$  is the transposed-conjugate  $u$  vector .

Let us now compute the simple product  ${}^t u \cdot S' \cdot v$  in two different manners :

$${}^t u \cdot S' \cdot v = {}^t u \cdot (S' \cdot v) = {}^t u \cdot (a_2 \cdot v) = a_2 \cdot ({}^t u \cdot v) \quad \text{Eq.(1)}$$

Since  $S'$  is symmetric,  ${}^tS' = S'$ , therefore :

$${}^t u.S'.v = ({}^t u.S').v = ({}^t u.{}^t S').v = {}^t(S'.u).v = {}^t(a_1.u).v = a_1.({}^t u.v) \quad \text{Eq.(2)}$$

Equalizing the second members of Eq.(1) and Eq.(2) results in :  $(a_1 - a_2).{}^t u.v = 0$

Usually, the eigen values  $a_1$  and  $a_2$  are different, therefore the simple product of two eigen vectors is null :  ${}^t u.v = 0$

The eigen vectors  $P, S_1, S_2$  representing the principal wave modes of acoustical propagation are not orthogonal in the hermitian sense, however their simple product is null.

Now let us consider a coordinate system in which the z component is orthogonal to the elliptic plane of polarisation, or particle motion, of the eigen wave of mode u ( it is equivalent to project the wave mode v onto the polarisation plane of mode u).

$$\text{One obtain : } {}^t u.v = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

This is equivalent to say that the projected coordinates of vector v on the polarization plane of vector u are :

$$v = k^* (-y_1, x_1)$$

Therefore, the particle motion of two eigen modes projected onto the plane of elliptical polarization of the third eigen mode, appear are similar ellipses rotated by  $90^\circ$  relatively to the 3rd eigen mode motion, with the same ellipticity, modulo a convolutive factor, and the projected elliptic particle motions are seen with the **same angular rotation** versus time.

The above result clearly enables simplifications in the design of computer processing operations aimed at detecting the anisotropy parameters including the ellipticity of the eigen S-wave particle motions. Gal'Perin and Dubesset observed that the eigen polarisation ellipticity increases notably in the 50-120Hz seismic bandwidth, and they firmly expected the existence of ellipticity for the eigen Shear wave modes ( this hypothesis remains to be verified on field seismic data).



## **CONCLUSIONS AND SUGGESTIONS**

It has been possible to formulate a few elements of answer to the question of the relative shape of the eigen shear wave particle motions in the general case of anisotropic propagation medium ( 21 coefficients for the elastic constants of the stiffness tensor plus 21 coefficients for the dissipative constants).

The theoretical result reached in the present study remains to be verified on practical field case studies, ultrasonic or seismic.

The interpretation of observations ought to be developed in terms of internal geometry of the propagation medium (laminations, multiple fracturations, stratification, pores, stress, etc...)

Besides, acoustic anisotropy appears with the shear waves ultrasounds above 0.5 MHz when an EM-electromagnetic field is applied to certain objects. An interesting investigation would be to explore if these effects can be observed in rock samples using sonic frequencies commonly used in borehole logging (1 to 10KHz), and over which value of EM field intensity.

## **REFERENCES**

- Landau et Lifchitz                      Théorie de l'élasticité, Editions Mir,1967  
<https://archive.org/details/landau-lifchitz-physique-theorique-vol-07-theorie-de-lelasticite-mir-1967>
- T. Bourbié, O. Coussy  
and B. Zinszner                      Acoustique des milieux poreux,1986, Editions Technip
- C. Cllet and M. Dubesset              1987: Three-component recordings: Interest for land seismic  
source study. Geophysics, 52, 8, pp. 1048-1059  
<https://doi.org/10.1190/1.1442370>
- R.D. Borchardt                      Elliptical particle motion for P- and S- inhomogeneous waves ,  
May 10,1973, JGR, 78(14), 2442-2456  
<https://doi.org/10.1029/JB078i014p02442>
- E.I. Gal'perin                      Vertical Seismic Profiling, SEG, 1974
- G. Grau                      Effet de l'atténuation visco-élastique sur la polarisation  
des ondes sismiques. I.F.P. et Ecole Centrale de Lyon .